21　方程式への応用

基本問題 & 解法のポイント

35　略解

$x=0$ は $2x^3-3ax^2+8=0$ を満たさないから $x \neq 0$

よって，$a=\dfrac{2x^3+8}{3x^2}$

したがって，直線 $y=a$ と曲線 $y=\dfrac{2x^3+8}{3x^2}$ が $0 \leq x \leq 3$ の範囲に少なくとも 1 個の共有点をもつように，a の範囲を定めればよい。

$y=\dfrac{2x^3+8}{3x^2}$ $(0<x\leq 3)$ の増減を調べると，$y'=\dfrac{2(x^3-8)}{3x^3}$ より，

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'	/	$-$	0	$+$	/
y	/	$\downarrow$	2	$\uparrow$	$\dfrac{62}{27}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{2x^3+8}{3x^2}=\infty$

よって，$a \geq 2$ ならば直線 $y=a$ と曲線 $y=\dfrac{2x^3+8}{3x^2}$ が $0 \leq x \leq 3$ の範囲に少なくとも 1 個の共有点をもつ。すなわち方程式 $2x^3-3ax^2+8=0$ が $0 \leq x \leq 3$ の範囲に少なくとも 1 個の実数解をもつ。

36

$f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を $q(x)$（$q(x)$ は定数または多項式）とすると，
$f(x)=(x-\alpha)^2q(x)$ より，

$$f'(x)=2(x-\alpha)q(x)+(x-\alpha)^2q'(x)$$
$$=(x-\alpha)\{2q(x)+(x-\alpha)q'(x)\}$$

よって，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

A

123

$(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ 与式より，$a=-(x^2+2x-2)e^{-x}$

ここで，$f(x)=-(x^2+2x-2)e^{-x}$ とおくと，

$(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ の異なる実数解の個数は $y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の数と一致する。

したがって，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフから共有点の数を調べればよい。

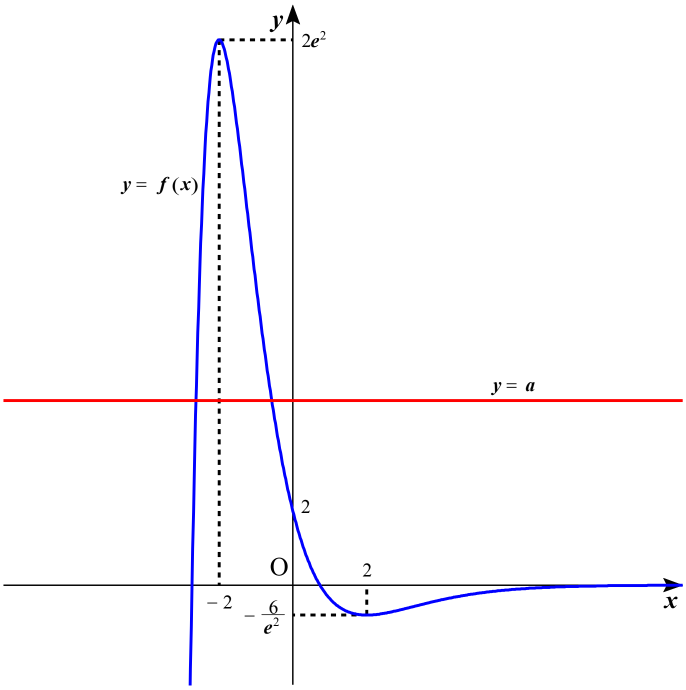
$f'(x)=e^{-x}(x-2)(x+2)$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$2e^2$	$\downarrow$	$-\dfrac{6}{e^2}$	$\uparrow$

$x>0$ のとき $0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{x^2}{e^x}$，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ より，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ $\quad\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}-\dfrac{x^2+2x-2}{e^x}=0$

また，$x=-t$ とおくと，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-(x^2+2x-2)e^{-x}=\lim_{t\to\infty}-(t^2-2t-2)e^t=-\infty$

以上より，$y=f(x)$のグラフは次のようになる。



よって，$a>2e^2$ のとき 0 個，$a=2e^2$, $a<-\dfrac{6}{e^2}$ のとき 1 個，

$0\leq a<2e^2$, $a=-\dfrac{6}{e^2}$ のとき 2 個，$-\dfrac{6}{e^2}<a<0$ のとき 3 個

124

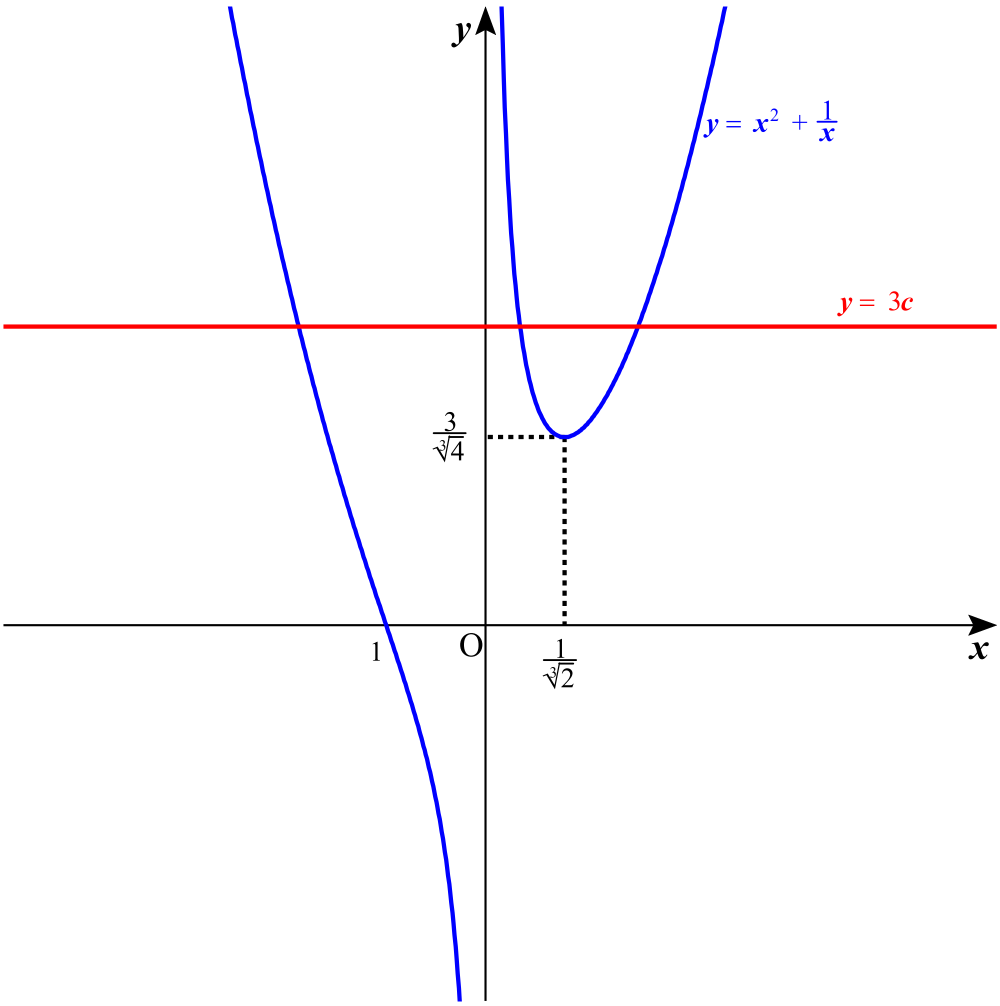
$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	/	$\downarrow$	$f\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)$	$\uparrow$

これと $f\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)=2^{-\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}(1+2)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$，

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to+-0}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+-\infty}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



よって，ただ 1 つの実数解をもつための必要十分条件は$3c<\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$すなわち$c<\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

これより，$c_0=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$　・・・(ア)

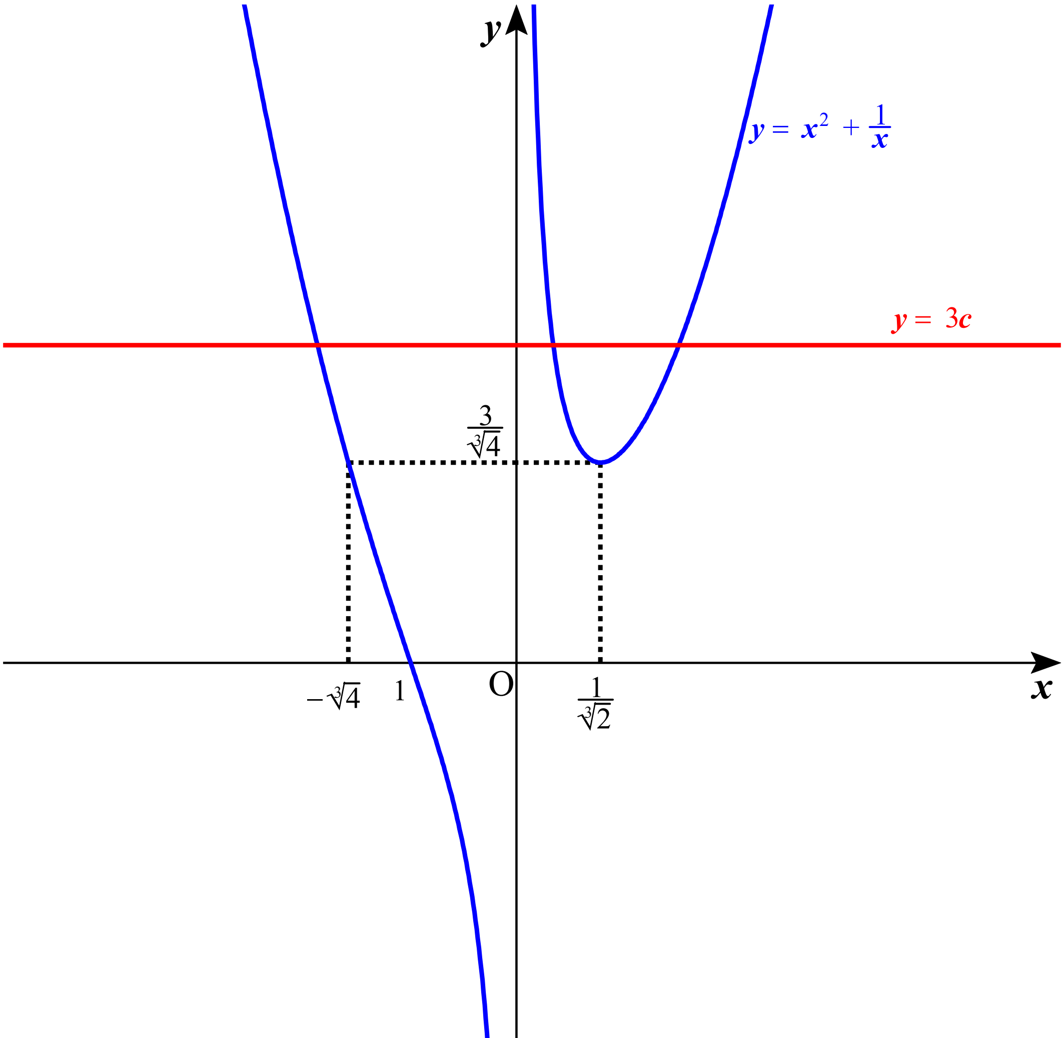
$x^2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$の解について

$x^2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$より，$x^3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}x+1=0$

$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$は$x^3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}x+1=0$の重解だから，もう 1 つの解を$\alpha$とすると，

解と係数の関係より，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\alpha=0$　$\therefore \alpha=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{\dfrac{8}{2}}=-\sqrt[3]{4}$

よって，下図より，実数解aの値のとりうる範囲は$-\sqrt[3]{4}<a<0$　・・・(イ)・(ウ)



125

(1)

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}\ (x>0)$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\uparrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\downarrow$

よって，$f(x)$ は $x=e$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

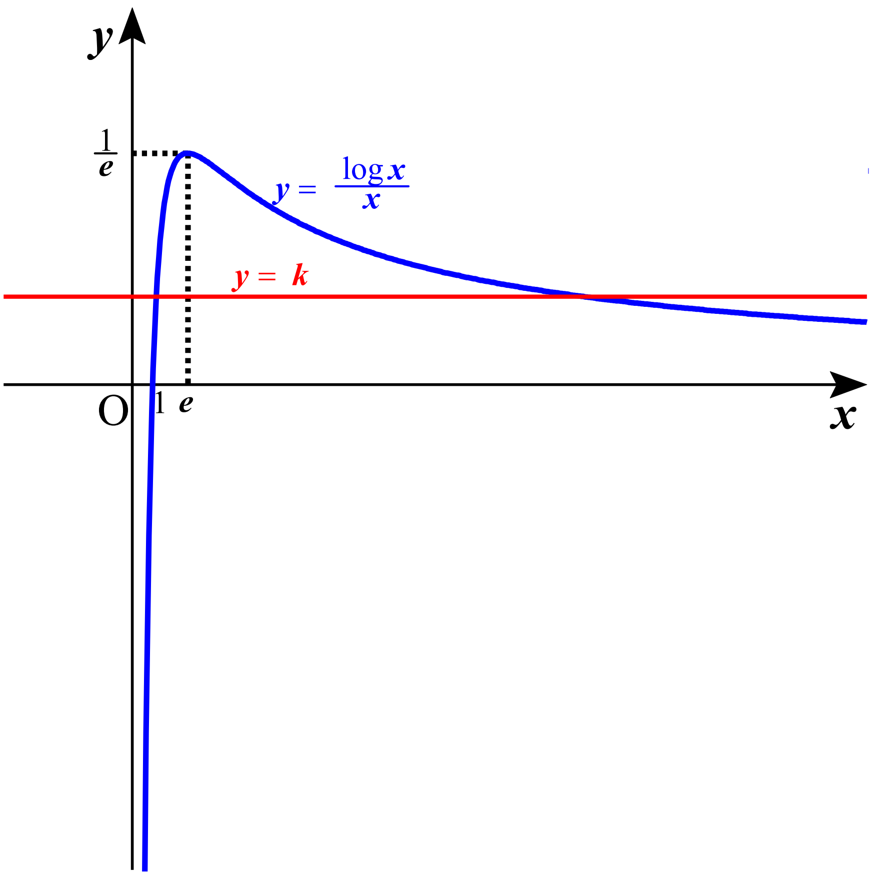
(2)

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ および(1)の増減表より，

$y=f(x)$ のグラフは次のようになる。

これと $y=k$ との共有点の数が $f(x)=k$ の異なる解の数だから，

$f(x)=k$ が 2 つの異なる解をもつような定数 k の値の範囲は $0<k<\dfrac{1}{e}$



(3)

$x^a=a^x$ の 1 つの解は $x=a$ だから，$x^a=a^x$ が 2 つ以上の解をもつことが必要である。

$x^a=a^x$ の両辺の自然対数をとると，$a\log x=x\log a$ より，$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{\log a}{a}$ だから，

$0<\dfrac{\log}{x}<\dfrac{1}{e}$ のとき $x^a=a^x$ は 2 つの解をもつ。

また，このとき $1<a<e$ ならばもう 1 つの解は a より大きくなる。

よって，$1<a<e$

はさみうちの原理を用いての $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ の証明

証明のコツ

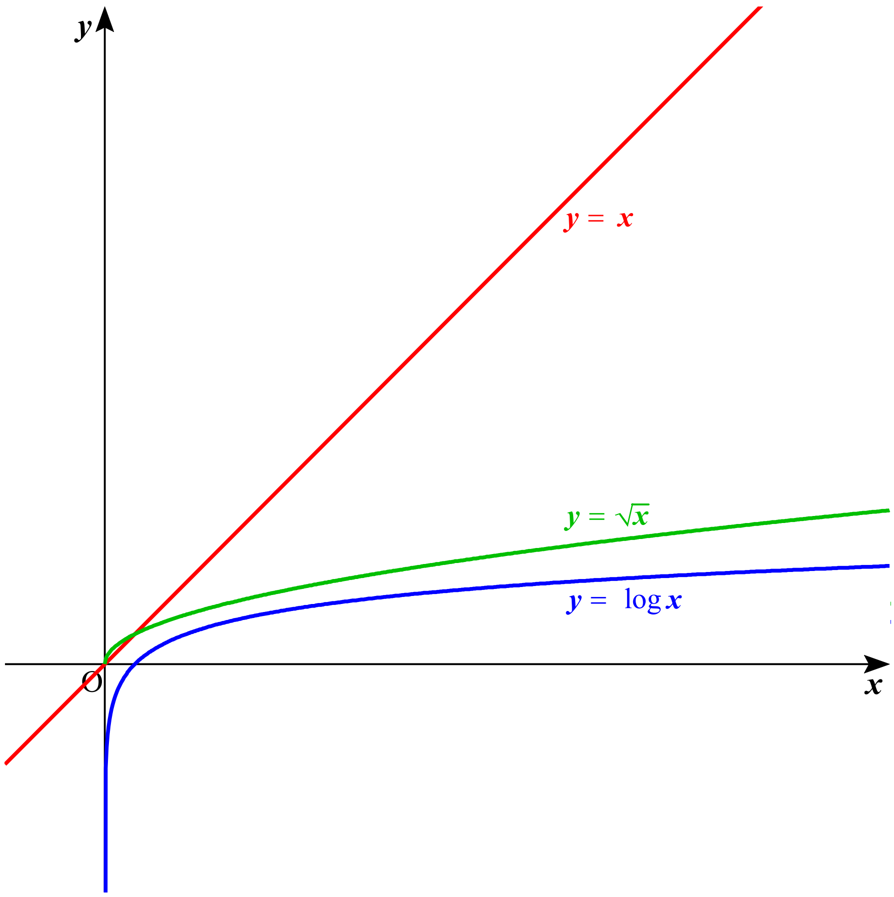
指数関数，対数関数，三角関数はそのままでは扱いにくいので，

$y=x^a$（a は $\log x<x^a<x$ を満たす適当な実数）を用いて

$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{x^a}{x}\xrightarrow{x\to\infty}0$ から $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を導く。

下図より，$\sqrt{x}$ が扱いやすく，さらに微分したあとの処理を楽にするために

$2\sqrt{x}$ としたほうがよさそうだ。



証明

$g(x)=2\sqrt{x}-\log x\ (x>0)$ とすると，$g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$ より，$g(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$
$g(x)$	/	$\downarrow$	2	$\uparrow$

よって，$g(x)>0$ すなわち $2\sqrt{x}>\log x$

これより，$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ だから，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

$x=e^t$ とおくと，$x\to\infty$ ならば $t\to\infty$ だから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log e^t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}$$

これと $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$　$\displaystyle\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

126

(1)

接線の方程式は，$y'=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$ より，$y=\left(1-2t^2\right)e^{-t^2}(x-t)+te^{-t^2}$

すなわち $y=\left(1-2t^2\right)e^{-t^2}x+2t^3e^{-t^2}$

よって，$h(t)=2t^3e^{-t^2}$

(2)

$$\begin{aligned} h'(t)&=6t^2e^{-t^2}-4t^4e^{-t^2} \\ &=2t^2\left(3-2t^2\right)e^{-t^2} \end{aligned}$$

より，$h(t)=2t^3e^{-t^2}$ （$-2<t<2$）の増減は次のようになる。

t	-2	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	2
$h'(t)$	/	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	/
$h(t)$	/	↓	$-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↑	0	↑	$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↓	/

これと $\displaystyle\lim_{t\to-2+0}h(t)=-16e^{-4}<0$，$\displaystyle\lim_{t\to2-0}h(t)=16e^{-4}>0$ より，

$t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$，$t=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ をとる。

(3)

$(0,\ a)$ から曲線 C 上の点に接線が引けるとき，

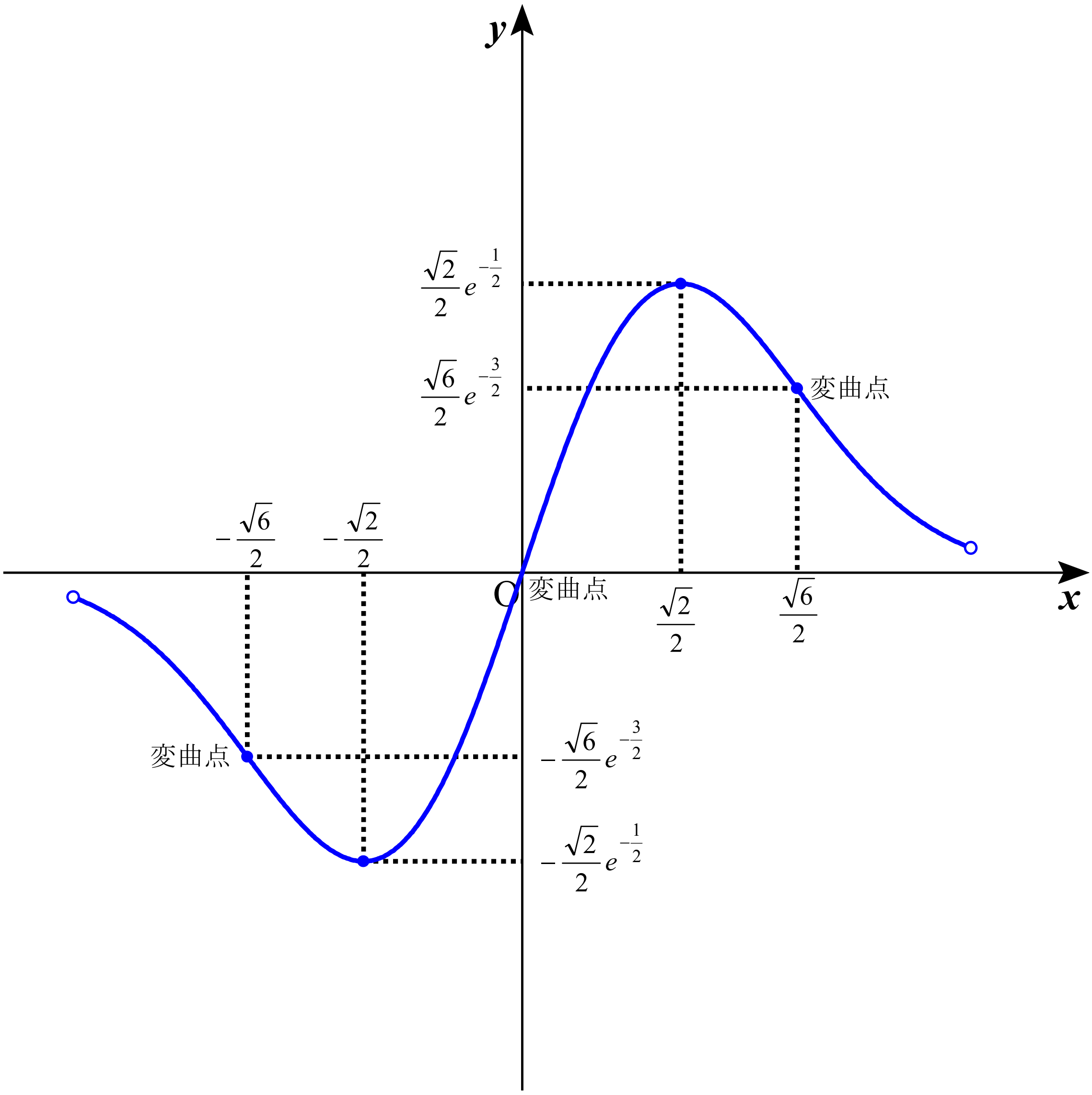
$(0,\ a)$ は接線と y 軸と交わる点だから，$a=h(t)$ が成り立つ。　・・・①

$y=xe^{-x^2}$，$y'=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$，$y''=2x\left(2x^2-3\right)e^{-x^2}$ より，

曲線 C の増減と凹凸は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	2
y'	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
y''	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	/
y	/	↓∩	$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ 変曲点	↓∪	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ 極小点	↑∪	0 変曲点	↑∩	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ 極大点	↓∩	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ 変曲点	↓∪	/

これよりグラフは次のようになる。



曲線 C の増減と凹凸から，接点を 2 つ以上もつ接線は存在しない。

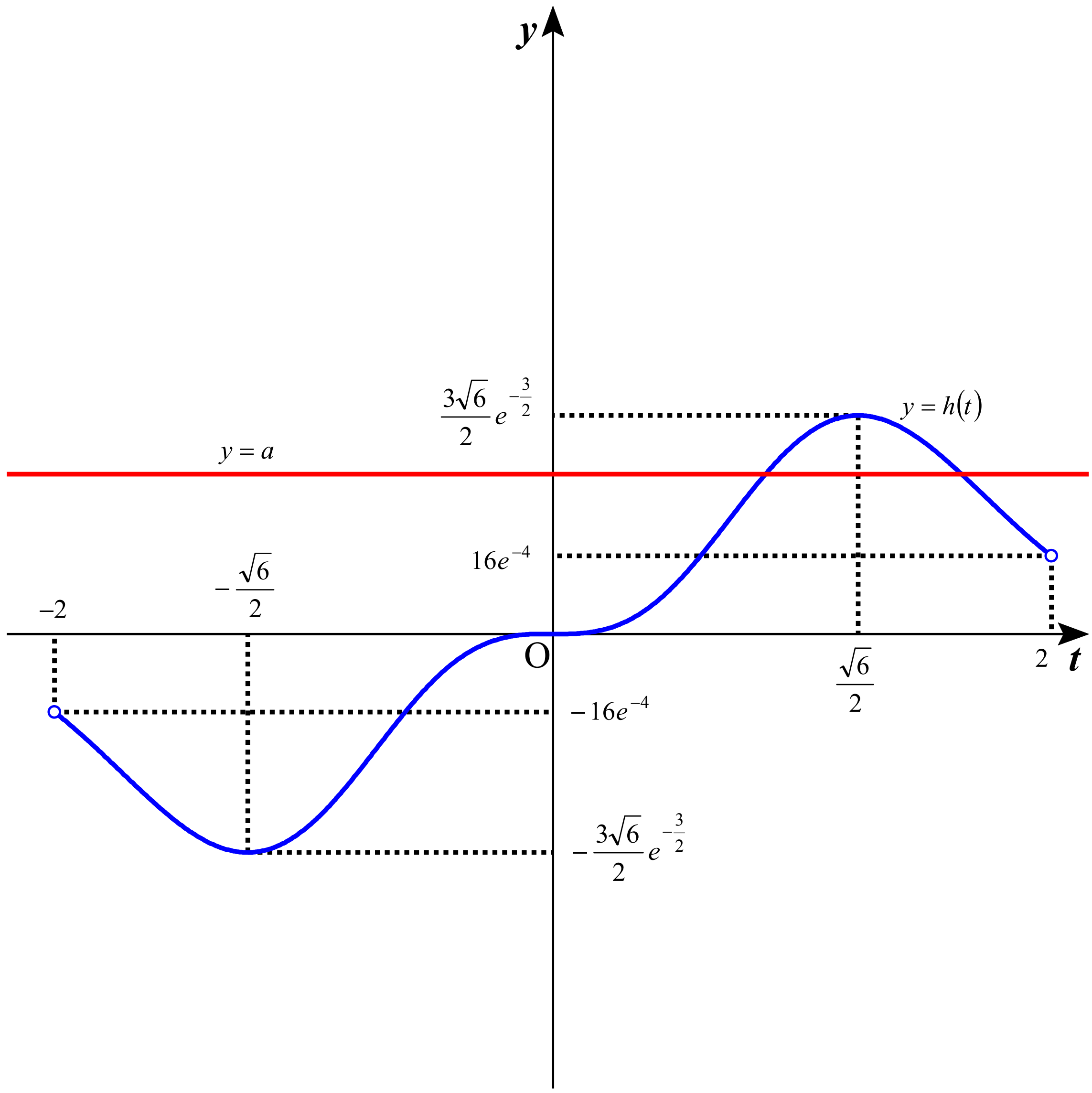
すなわち接点が異なれば接線も異なる。　・・・②

①，②より，点 $(0,\ a)$ から曲線 C に接線を 2 本引くことができるための必要十分条件は

$a=h(t)$ を満たす異なる 2 つの実数 t が存在すること，

すなわち $y=a$ と $y=h(t)$ が 2 つの共有点をもつことである。

よって，(2)の $y=h(t)$ の増減より，$-\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}<a<-16e^{-4}$ または $16e^{-4}<a<\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$


y
$\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$
$y=h(t)$
$y=a$
$16e^{-4}$
$-\frac{\sqrt{6}}{2}$
-2
O
$\frac{\sqrt{6}}{2}$
2
t
$-16e^{-4}$
$-\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

B

127

(1)

$$f'(x) = -2x^{-3}2^x + x^{-2}2^x \log 2$$
$$= \frac{2^x(x\log 2 - 2)}{x^3}$$

$2^x > 0$ より，$\dfrac{x\log 2 - 2}{x^3} > 0$　すなわち $x^3(x\log 2 - 2) > 0$（$\because$ 分母と分子は同符号）

$\therefore x < 0,\ \dfrac{2}{\log 2} < x$

(2)

$x = 0$ は $2^x = x^2$ の解ではないから，$x \neq 0$ の条件で $2^x = x^2$ の相異なる実数解の数を調べればよい。

そこで，両辺を x^2 で割り，$\dfrac{2^x}{x^2} = 1$ とすると，相異なる実数解の数は $y = f(x)$ のグラフと $y = 1$ のグラフの相異なる共有点の数となる。

$f(x)$ の増減は，(1)より，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	/	$\downarrow$	極小	$\uparrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to+0} f(x) = \infty$

さらに，$2 < e < 4$ より，$0 < \log 2 < \log e < 2\log 2$　すなわち $\dfrac{1}{2\log 2} < 1 < \dfrac{1}{\log 2}$ であり，

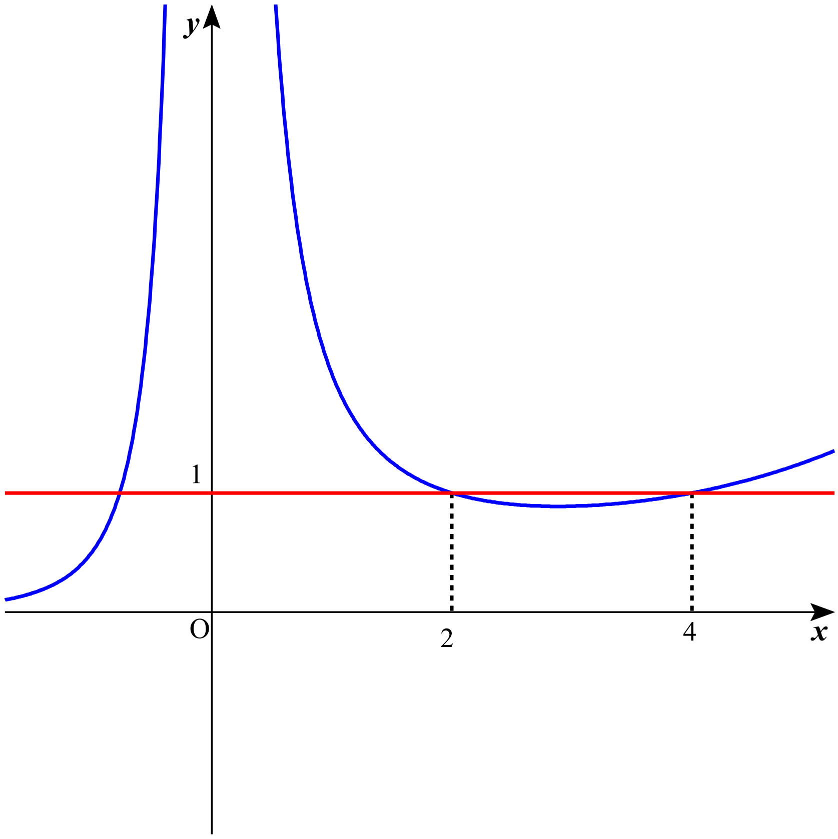
これより，$2 < \dfrac{2}{\log 2} < 4$

これと $f(2) = 1,\ f(4) = 1$ および増減表より，$f\left(\dfrac{2}{\log 2}\right) < 1$

よって，$y = f(x)$ と $y = 1$ は $x < 0$ および $x = 2, 4$ において共有点をもつ。

ゆえに，$2^x = x^2$ は相異なる 3 つの実数解をもつ。

参考図



(3)

(2)より，$2^x=x^2$ は異なる 3 つの実数解をもち，2 つは正，1 つは負である。

正の実数解は 2 と 4 で明らかに有理数である。

そこで，負の実数解が有理数であるかについて調べる。

負の解が有理数であると仮定し，その解を $-\dfrac{p}{q}$ （p と q は互いに素な自然数）とおくと，

$2^{-\frac{p}{q}}=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ より，$2^{\frac{p}{q}}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$　$\therefore 2^p=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{2q}$　・・・①

したがって，$\dfrac{q}{p}$ は 2 のべき乗である。

これと，p と q は互いに素な自然数であることから，$p=1$

これを①に代入すると，$2=q^{2q}$　・・・②

q^{2q} は単調に増加し，$q=1$ のとき $q^{2q}=1$，$q=2$ のとき $q^{2q}=16$ であるから，

②を満たす自然数 q は存在しない。

よって，負の実数解は有理数ではない。すなわち無理数である。

ゆえに，有理数解は 2 と 4

128

(1)

共有点をもつこととxの方程式$a\log x+b=\dfrac{x^2}{a}+x$が実数解をもつことは同値である。

$a\log x+b=\dfrac{x^2}{a}+x$ より，$b=\dfrac{x^2}{a}+x-a\log x$

したがって，$h(x)=\dfrac{x^2}{a}+x-a\log x$ とおくと，

xの方程式$a\log x+b=\dfrac{x^2}{a}+x$が実数解をもつことと

曲線$y=h(x)$と直線$y=b$が共有点をもつことは同値である。

よって，曲線$y=h(x)$と直線$y=b$が共有点をもつbの範囲を求めればよい。

$h'(x)=\dfrac{(x+a)(2x-a)}{ax}$ より，$h(x)$の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	/	$-$	0	$+$
$h(x)$	/	$\downarrow$	極小値	$\uparrow$

極小値は$h\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+a-a\log\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{4}a-a\log a+a\log 2=a\left(\dfrac{3}{4}+\log 2-\log a\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=+\infty$

よって，$a\left(\dfrac{3}{4}+\log 2-\log a\right)\leq h(x)$

ゆえに，$b\geq a\left(\dfrac{3}{4}+\log 2-\log a\right)$

(2)

bが$b\geq a\left(\dfrac{3}{4}+\log 2-\log a\right)$の最大値を満たせばよい。

$i(a)=a\left(\dfrac{3}{4}+\log 2-\log a\right)$ とおくと，

$i'(a)=\dfrac{3}{4}+\log 2-\log a+a\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{4}+\log 2-\log a=\log 2e^{-\frac{1}{4}}-\log a$

よって，$i(a)$の増減は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$2e^{-\frac{1}{4}}$	$\cdots$
$i'(a)$	/	$+$	0	$-$
$i(a)$	/	↑	最大値	↓

最大値は$i\left(2e^{-\frac{1}{4}}\right)=2e^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}+\log 2-\log 2e^{-\frac{1}{4}}\right)=2e^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}+\log 2-\log 2+\frac{1}{4}\right)=2e^{-\frac{1}{4}}$

よって，bが満たすべき条件は$b \geq 2e^{-\frac{1}{4}}$

ゆえに，bの最小値は$2e^{-\frac{1}{4}}$